

## ESERCIZI MAT. II /3

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + t^2 \\ x(2) = 2 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + 8 = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

4. Trovare la soluzione generica della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8 = (t + 1)e^{2t}.$$

5. Trovare la soluzione generica della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^{-t} \sin t.$$

6. Trovare la soluzione generica della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8 = \begin{cases} 24e^{2t} & t \geq 0 \\ 24e^{8t} & t \leq 0 \end{cases}$$

## SOLUZIONI

1. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per  $t$  si ottiene:

$$t\dot{x} = x + t^3$$

da cui:

$$t\dot{x} - x = t^3$$

da cui:

$$\frac{t\dot{x} - x}{t^2} = t.$$

Adesso notiamo che il membro sinistro dell'equazione non è altro che  $\frac{\partial(\frac{x}{t})}{\partial t}$ , da cui:

$$\frac{\partial(\frac{x}{t})}{\partial t} = t$$

da cui si ricava:

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2}t^2 + c$$

da cui:

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 + ct.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene:

$$2 = x(2) = 4 + 2c$$

da cui si ricava  $c = -1$ . La soluzione del problema di Cauchy è dunque:

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - t.$$

2. Ponendo  $y = \dot{x}$  l'equazione diventa:

$$\dot{y} - 6y = -8. \tag{1}$$

Derivando si ottiene:

$$\ddot{y} - 6\dot{y} = 0$$

che ha soluzione generica  $\dot{y} = Ce^{6t}$ , da cui:

$$y = \frac{1}{6}Ce^{6t} + c.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (1) si ottiene:

$$Ce^{6t} - 6\left(\frac{1}{6}Ce^{6t} + c\right) = -8$$

da cui si ricava  $-6c = -8$  e quindi  $c = \frac{4}{3}$ . Risostituendo  $\dot{x}$  a  $y$  si ottiene:

$$\dot{x} = \frac{1}{6}Ce^{6t} + \frac{4}{3}$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{36}Ce^{6t} + \frac{4}{3}t + c_0.$$

Si guardi la soluzione dell'esercizio 4 per vedere come si poteva arrivare a questo risultato usando un altro metodo.

Procediamo adesso imponendo le condizioni iniziali, ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = \frac{1}{36}C + c_0 \\ -2 = \dot{x}(0) = \frac{1}{6}C + \frac{4}{3} \end{cases}$$

da cui si ricava:  $C = -20$  e  $c_0 = \frac{5}{9}$ . La soluzione del problema di Cauchy è dunque:

$$x(t) = -\frac{5}{9}e^{6t} + \frac{4}{3}t + \frac{5}{9}.$$

3. Il polinomio associato all'equazione è  $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ , che ha radici  $\lambda_1 = -1 - i$  e  $\lambda_2 = -1 + i$ . La soluzione generica dell'equazione è quindi:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-t-it} + Be^{-t+it}$$

da cui

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 Ae^{\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{\lambda_2 t} = (-1 - i)Ae^{-t-it} + (-1 + i)Be^{-t+it}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$1 = x(0) = A + B \quad 0 = \dot{x}(0) = A(-1 - i) + B(-1 + i)$$

da cui si ricava  $A = \frac{1}{2}(1 + i)$  e  $B = \frac{1}{2}(1 - i)$ . La soluzione del problema di Cahuchy è dunque:

$$x(t) = \frac{1}{2}((1 + i)e^{-t-it} + (1 - i)e^{-t+it}) = e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

4. Moltiplicando ambo i membro dell'equazione per il fattore integrante  $e^{-6t}$  si ottiene:

$$e^{-6t}\ddot{x} - 6e^{-6t}\dot{x} = -8e^{-6t} + (t + 1)e^{-4t}.$$

Adesso notiamo che il membro sinistro dell'equazione non è altro che la derivata di  $\dot{x}e^{-6t}$ , integrando si ottiene:

$$\dot{x}e^{-6t} = \frac{4}{3}e^{-6t} - \frac{1}{4}te^{-4t} - \frac{5}{16}e^{-4t} + C$$

da cui

$$\dot{x} = \frac{4}{3} - \frac{1}{4}te^{2t} - \frac{5}{16}e^{2t} + Ce^{6t}$$

da cui

$$x = \frac{4}{3}t - \frac{1}{8}te^{2t} + \frac{1}{16}e^{2t} - \frac{5}{32}e^{2t} + \frac{1}{6}Ce^{6t} + C_1.$$

La soluzione generica dell'equazione differenziale è dunque:

$$x(t) = \frac{4}{3}t - e^{2t}\left(\frac{1}{8}t + \frac{3}{32}\right) + \frac{1}{6}Ce^{6t} + C_1$$

5. Siccome l'equazione è lineare, possiamo imporre che le soluzioni siano del tipo

$$x(t) = e^{-t}y(t) \quad (2)$$

in modo da semplificare il fattore  $e^{-t}$  del termine noto. Usando la (2) si ricava:

$$\dot{x} = -e^{-t}y + e^{-t}\dot{y} \quad \ddot{x} = e^{-t}y - 2e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y}.$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione di partenza, si ottiene:

$$e^{-t}y - 2e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y} + 2(-e^{-t}y + e^{-t}\dot{y}) + 2e^{-t}y = e^{-t} \sin t$$

da cui, semplificando  $e^{-t}$ ,

$$\ddot{y} + y = \sin t. \quad (3)$$

Un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione omogenea è:

$$\cos t \quad \sin t$$

quindi, una volta trovata una soluzione particolare  $z(t)$  dell'equazione non omogenea, la soluzione generica sarà del tipo

$$y(t) = A \sin t + B \cos t + z(t).$$

Procuriamoci adesso una soluzione  $z$  dell'equazione non omogenea. La cerchiamo della forma

$$z(t) = \alpha(t) \sin t + \beta(t) \cos t.$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione si ottiene:

$$\ddot{\alpha} \sin t + \ddot{\beta} \cos t + 2\dot{\alpha} \cos t - 2\dot{\beta} \sin t = \sin t.$$

Andiamo quindi a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} = 1 \end{cases}$$

Una soluzione di tale sistema è data da:

$$\alpha(t) = 0 \quad \beta(t) = -\frac{1}{2}t$$

Da cui si ricava che

$$z(t) = -\frac{1}{2}t \cos t$$

è una soluzione particolare di (3), che avrà quindi come soluzione generica:

$$y(t) = A \sin t + B \cos t - \frac{1}{2}t \cos t$$

quindi la soluzione generica dell'equazione di partenza sarà

$$x(t) = e^{-t}y(t) = e^{-t}(A \sin t + B \cos t - \frac{1}{2}t \cos t)$$

6. Come abbiamo fatto nell'esercizio 4, si moltiplica tutta l'equazione per  $e^{-6t}$ , ottenendo

$$\frac{\partial(\dot{x}e^{-6t})}{\partial t} = -8e^{-6t} + \begin{cases} 24e^{-4t} & t \geq 0 \\ 24e^{2t} & t \leq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\dot{x}e^{-6t} = \frac{4}{3}e^{-6t} + \begin{cases} -6e^{-4t} + c_1 & t \geq 0 \\ 12e^{2t} + c_2 & t \leq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\dot{x} = \frac{4}{3} + \begin{cases} -6e^{2t} + c_1e^{6t} & t \geq 0 \\ 12e^{8t} + c_2e^{6t} & t \leq 0 \end{cases}$$

da cui

$$x = \frac{4}{3}t + \begin{cases} -3e^{2t} + \frac{1}{6}c_1e^{6t} + c_3 & t \geq 0 \\ \frac{3}{2}e^{8t} + \frac{1}{6}c_2e^{6t} + c_4 & t \leq 0 \end{cases}$$

Siccome l'equazione è del secondo ordine, siamo interessati alle soluzioni di classe almeno  $\mathcal{C}^2$ . Se vogliamo che  $x(t)$  sia continua anche in 0 dobbiamo imporre:

$$-3 + \frac{1}{6}c_1 + c_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}c_2 + c_4$$

da cui

$$c_3 - c_4 = \frac{1}{6}(c_2 - c_1) + \frac{9}{2}.$$

Se vogliamo che in oltre anche la derivata prima di  $x(t)$  sia continua in 0 dobbiamo imporre:

$$-6 + c_1 = 12 + c_2$$

da cui

$$c_2 - c_1 = -18 \quad \text{da cui} \quad c_3 - c_4 = \frac{1}{2}$$

Se vogliamo imporre che anche la derivata seconda di  $x(t)$  sia continua in 0, dobbiamo imporre:

$$-12 + 6c_1 = 96 + 6c_2$$

da cui

$$c_2 - c_1 = -18$$

che è la stessa condizione trovata poco sopra. Quindi la generica soluzione di classe  $\mathcal{C}^2$  dell'equazione di partenza è:

$$x = \frac{4}{3}t + \begin{cases} -3e^{2t} + \frac{1}{6}c_1e^{6t} + c_3 & t \geq 0 \\ \frac{3}{2}e^{8t} + \frac{1}{6}(c_1 - 18)e^{6t} + (c_3 - \frac{1}{2}) & t \leq 0 \end{cases}$$