Esercizi Mat. II /2

1. Eseguire le seguenti operazioni tra numeri complessi:

   j) $(2-3i)+(5-5i)$.

   jj) $(2-3i)-(5-5i)$.

   jjj) $(2-3i)\cdot(5-5i)$.

   ju) $\dfrac{(5-5i)}{(2-3i)}$.

2. Scrivere in coordinate polari (cioè trovare il modulo ρ e l'argomento θ) del numero complesso $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

3. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione:

$$z^2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

4. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione:

$$e^{iz}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

5. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione:

$$e^{iz}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

6. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione:

$$z^2+2iz+(-3+2i\sqrt{3})=0.$$

Soluzioni

1. j) $(2-3i)+(5-5i)=7-8i$.

   jj) $(2-3i)-(5-5i)=-3+2i$.

   jjj) $(2-3i)\cdot(5-5i)=10-10i-15i-15=-5-25i=-5(1+5i)$.

   ju) $\dfrac{(5-5i)}{(2-3i)}=\dfrac{(5-5i)(2+3i)}{4+9}=\dfrac{10+15-10i+15i}{13}=\dfrac{25+5i}{13}$.

2. $\rho = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$

   Per trovare l'argomento θ si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

   che ha soluzione $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Quindi $z = \rho e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3. Sfruttando l'esercizio 2 e ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, l'equazione diventa

$$\rho^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

   da cui $\rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$ e $2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2t\pi$ con $t \in \mathbb{Z}$, cioè $\theta = \dfrac{\pi}{6} + t\pi$. Le soluzioni per $0 \leq \theta < 2\pi$ sono quindi $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \dfrac{7\pi}{6}$.

   Le soluzioni dell'equazione sono quindi:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad\qquad z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -z_1.$$

4. Essendo $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, l'equazione diventa

$$e^{iz} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

   che ha soluzione $z = \dfrac{\pi}{4} + 2g\pi$ con $g \in \mathbb{Z}$.

5. Essendo $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, l'equazione diventa

$$e^{iz} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

   che ha soluzione $z = \dfrac{2\pi}{3} + 2s\pi$ con $s \in \mathbb{Z}$.

6. Dalla formula risolutiva delle equazioni di secondo si ricava:

$$z = -i + \sqrt{-1 + 3 - 2i\sqrt{3}} = -i + \sqrt{2(1 - i\sqrt{3})} = -i + 2\sqrt{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$$

similmente a come si è fatto nell'esercizio 3, si ricava

$$\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \pm(\frac{i-\sqrt{3}}{2})$$

da cui

$$z = -i \pm 2(\frac{i-\sqrt{3}}{2}) = -i \pm (i-\sqrt{3})$$

le soluzioni dell'equazione sono quindi:

$$z_1 = -\sqrt{3} \qquad\qquad z_2 = -2i + \sqrt{3}.$$