

ESERCIZI MAT. II /1

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A + B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$.

2. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

3. calcolare il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

4. calcolare il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 4x - y + z = 5 \end{cases}$$

6. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + 3z = 4 \\ -x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

SOLUZIONI

1.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & -1-2 \\ 1+1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6-1 & -4+1 \\ 3+3 & -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6-2 & -3-6 \\ 2-1 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Dalla prima equazione si ottiene $y = 2x - 1$. Sostituendo $2x - 1$ al posto di y nella seconda equazione si ottiene $x + 3(2x - 1) = 2$, ossia $x + 6x - 3 = 2$, e quindi $7x = 5$, da cui $x = \frac{5}{7}$. Infine da $y = 2x - 1$ si ottiene $y = \frac{10}{7} - 1 = \frac{10-7}{7} = \frac{3}{7}$.

3. Siccome le operazioni elementari sulle righe e sulle colonne non cambiano il determinante, prima di procedere al calcolo cerchiamo di semplificare un po' la matrice tramite queste operazioni. Visto che andremo a calcolare il determinante usando lo sviluppo secondo una riga o una colonna, cercheremo di procurarci una riga o colonna con quanti piú zero sia possibile. Sommando la terza riga alla prima (operazione elementare sulle righe) otteniamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

sviluppando adesso il determinante rispetto alla prima riga otteniamo

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8(1 - (-1 \cdot 2)) = 8(1 + 2) = 24.$$

4. Come nell'esercizio precedente, prima di procedere con i calcoli cerchiamo di semplificare la matrice. Sommando la seconda riga alla terza e successivamente sommando il doppio della seconda riga alla prima, otteniamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

adesso proseguiamo sottraendo la terza colonna alla seconda e poi sottraendo la quarta colonna alla seconda, otteniamo

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

sottraendo il quadruplo della quarta colonna alla terza e sviluppando il determinante rispetto alla terza riga si ottiene

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 17 & -4 \\ -1 & 5 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 10 & 17 \\ -1 & 5 & 13 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

sviluppando adesso rispetto alla prima colonna si ottiene

$$- \begin{vmatrix} 0 & 10 & 17 \\ -1 & 5 & 13 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \left(\begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} \right) = 20 - 4(130 - 85) = -160.$$

5. Osserviamo prima di tutto che la terza equazione si ottiene sommando la prima al doppio della seconda e quindi, essendo linearmente dipendente dalle altre, possiamo scartarla. Il sistema dato è dunque equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

dalla prima equazione otteniamo $z = 2x + y - 3$. Andando a sostituire tale espressione nella seconda equazione si ottiene $x - y + 2x + y - 3 = 1$ da cui $3x = 4$, e quindi $x = \frac{4}{3}$. Sostituendo il valore trovato per x nella prima equazione si ottiene $z = \frac{8}{3} + y - 3$ da cui $z = y - \frac{1}{3}$. Le soluzioni del sistema sono quindi tutti e soli i vettori (x, y, z) per cui $x = \frac{4}{3}$ e $z = y - \frac{1}{3}$, cioè $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, y, y - \frac{1}{3})$; ossia tutti e soli i vettori della forma $v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale k .

6. Osserviamo che la terza equazione si ottiene sommando il doppio della prima alla seconda e che la quarta equazione si ottiene sommando il doppio della seconda alla prima. Quindi il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = x + z - 1$. Andando a sostituire tale espressione nella seconda equazione si ottiene $-x + 2(x + z - 1) + z = 2$ da cui $x = -3z + 4$. Risostituendo questa espressione nella prima equazione si ottiene $y = -3z + 4 + z - 1$ da cui $y = -2z + 3$.

Le soluzioni del sistema sono allora tutti e soli i vettori della forma $(x, y, z) = (-3z + 4, -2z + 3, z)$; ossia tutti e soli i vettori della forma

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ al variare del parametro reale } k.$$